$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-}(\frac{1}{1-x}-\ln\lambda)=\lim_{x\to 0^+}(\eta\mu x+\lambda\sigma\upsilon\nu x)=1-\ln\lambda \Leftrightarrow$$

$1-\ln\lambda=\lambda \Leftrightarrow \ln\lambda=1-\lambda \Leftrightarrow \ln\lambda+\lambda-1=0.\quad (1)$

Θεωρώ $\varphi(x)=\ln x+x-1 \quad , \quad x>0$ με $\varphi'(x)=\frac{1}{x}+1>0 \Rightarrow \varphi$ γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Από (1) είναι $\varphi(\lambda)=0 \Leftrightarrow \varphi(\lambda)=\varphi(1) \underset{\varphi(1-1)}{\overset{\varphi\gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha}{\Leftrightarrow}} \lambda=1$.

Γ2 Είναι $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x\leq 0 \\ \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x, & 0<x<\frac{3\pi}{2} \end{cases}$

Για $x<0$: $\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{\frac{1}{1-x}-1}{x}=\frac{1-1+x}{x(1-x)}=\frac{1}{1-x}$

Επίσης $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1-x}=1 \Rightarrow \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=1$

Για $x>0$: $\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}$

Είναι $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right)=1+0=1$, άρα $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=1$

Επομένως $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=1 \Rightarrow f'(0)=1$

Άρα η εφαπτόμενη στο Α $(0,1)$ έχει εξίσωση:

$y-f(0)=f'(0)(x-0) \Rightarrow y-1=x \Rightarrow y=x+1$

Αν ω η γωνία που σχηματίζει η εφαπτόμενη με τον άξονα xx' είναι:

$\varepsilon\varphi\omega=f'(0) \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega=1 \Leftrightarrow \omega=\frac{\pi}{4} \quad (\omega\in[0,\pi))..$

Γ3. Για $x<0$: $f'(x)=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{-(1-x)'}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}$

Για $x>0$; $f'(x)=(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)'=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$

Άρα $f'(x)=\begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2}, & x\leq 0 \\ \sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x, & x>0 \end{cases}$

Για $x\leq 0$ είναι $f'(x)>0$.

Για $0 < x < \frac{3\pi}{2}: f'(x) = 0 \Leftrightarrow \text{συν}x - \text{ημ}x = 0 \Leftrightarrow \text{ημ}x = \text{συν}x$

$\overset{\text{συν}x\neq 0}{\Leftrightarrow}$ $\text{εφ}x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ή $x = \frac{5\pi}{4}$ αφού $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$

Επειδή λοιπόν η f' ορίζεται στο $\left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right)$ και $f'(x) = 0$ στα $x = \frac{\pi}{4}$ και $x = \frac{5\pi}{4}$ αυτά είναι και τα κρίσιμα σημεία.

Γ4. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $M(\alpha, f(\alpha))$ είναι $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - a)$.

Για $y = 0 \Rightarrow -f(a) = f'(a)x - af'(a) \Leftrightarrow x = \frac{af'(a) - f(a)}{f'(a)} = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$

Άρα το σημείο τομής της εφαπτομένης με τον άξονα $x'x$ είναι

$\text{B}\left(a - \frac{f(a)}{f'(a)}, 0\right)$

Επομένως $\text{x}_\text{B} = a - \frac{f(a)}{f'(a)} = a - \frac{\frac{1}{1-a}}{\frac{1}{(1-a)^2}} = a - (1-a) = 2a - 1$.

Άρα την οποιαδήποτε χρονική στιγμή t είναι:

$\text{x}_\text{B}(t) = 2a(t) - 1 \Rightarrow \text{x}'_\text{B}(t) = 2a'(t) \Rightarrow \text{x}'_\text{B}(t) = 2\left(-\frac{a(t)}{3}\right) \Rightarrow \text{x}'_\text{B}(t) = -\frac{2}{3}a(t)$ (1)

Όμως ισχύει $a(t_0) = -1$

Από (1) για $t = t_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x'_B(t_0) = -\frac{2}{3}a(t_0) \Rightarrow x'_B(t_0) = -\frac{2}{3}(-1) \Rightarrow x'_B(t_0) = \frac{2}{3}$ $\frac{\text{μονάδα μήκους}}{\text{μονάδα χρόνου}}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι:

$f'(x) = e^x + 2x - e \quad x \in \mathbb{R}$

$f''(x) = e^x + 2 \quad x \in \mathbb{R}$

$f''(x) > 0$ στο $\mathbb{R}$ άρα f' *γνησίως αύξουσα στο* $\mathbb{R}$

Η f' στο [0, 1] ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Bolzano αφού

$f'(0) = 1 - e < 0$

$f'(1) = 2 > 0$

Άρα υπάρχει $x_0 \in (0,1): f'(x_0) = 0$

Το παραπάνω είναι μοναδικό στο $\mathbb{R}$ αφού f' *γνησίως αύξουσα* στο $\mathbb{R}$.

Έτσι

$$x < x_0 \overset{f'\ \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(x_0) = 0$$

$$x > x_0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_0) = 0$$

x	$-\infty$ 0	x_0	1 $+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$	min: $f(x_0)$	$\nearrow$

Έχουμε:

$f(x_0) = e^{x_0} + x_0^{\ 2} - ex_0 - 1 \qquad (1)$

$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} + 2x_0 - e \Leftrightarrow e^{x_0} = e - 2x_0 \qquad (2)$

Η $(1) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} f(x_0) = e - 2x_0 + x_0^{\ 2} - ex_0 - 1 = x_0^{\ 2} - (e+2)x_0 + e - 1$

Δ2. Από (Δ1) για $x \neq x_0$ είναι $f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) > 0$

$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$ λόγω συνέχειας της f στο x_0.

Οπότε $\lim_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x) - f(x_0)} = +\infty \ (3)$

Ακόμη για $x \neq x_0$ είναι:

$$\eta\mu\left(\frac{1}{x - x_0}\right) \geq -1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu\left(\frac{1}{x - x_0}\right) \geq \frac{1}{f(x) - f(x_0)} - 1 \ (4)$$

Από (3) $\lim_{x \to x_0} \left(\dfrac{1}{f(x) - f(x_0)} - 1\right) = +\infty$

$$\overset{(4)}{\Rightarrow} \lim_{x \to x_0} \left[\frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu\left(\frac{1}{x - x_0}\right)\right] = +\infty$$

Δ3 Έστω $\varphi(x) = f(x) + x - x_0, \quad x \in [x_0, 1]$

Η φ είναι συνεχής στο $[x_0, 1]$ ως άθροισμα συνεχών.

- $\varphi(x_0) = f(x_0)$

Όμως $x_0 < 1 \overset{(\Delta_1)}{\Rightarrow} f(x_0) < f(1) = 0 \Rightarrow \varphi(x_0) < 0$

- $\varphi(1) = f(1) + 1 - x_0 > 0$

Άρα από Θεώρημα Bolzano υπάρχει $\rho \in (x_0, 1)$

Ώστε: $\varphi(\rho)=0 \Leftrightarrow f(\rho)+\rho-x_0=0$

Η παραπάνω ρίζα είναι μοναδική στο $[x_0,1]$

Αφού $\varphi'(x)=f'(x)+1>0 \;\; \sigma\tau o \; [x_0,1]$

$\Rightarrow \varphi \; \gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma \;\; \alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha \; \sigma\tau o \; [x_0,1]$.

Δ4. Είναι $f(\rho)+\rho=x_0$ με $\rho\in(x_0,1)$ και $x_0\in(0,1)$

Έχουμε για $\kappa\in(\rho,1)$:

$f(x_o)>f(\rho)\left(f'(\kappa)+1\right)\Leftrightarrow f(x_o)-f(\rho)>f(\rho)f'(\kappa)$

$\underset{x_0<\rho}{\overset{f(\rho)=x_0-\rho}{\Leftrightarrow}} \dfrac{f(x_0)-f(\rho)}{x_0-\rho}<f'(\kappa) \quad (5)$

Η f στο $[x_o,\rho]$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. άρα υπάρχει $\xi\in(x_0,\rho)$:

$f'(\xi)=\dfrac{f(x_0)-f(\rho)}{x_0-\rho} \quad (6)$

Η $(5)\overset{(6)}{\Leftrightarrow} f'(\xi)<f'(\kappa)$

Ισχύει αφού $f' \; \gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma \; \alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha \; \sigma\tau o \, \mathbb{R}$ και $\xi<\rho,\; \kappa\in(\rho,1)$

Δ4. **2ος τρόπος λύσης**

$f(x_0)>f(\rho)\left(f'(\kappa)+1\right)\Leftrightarrow f(x_0)>f(\rho)f'(\kappa)-f(\rho)\Leftrightarrow$

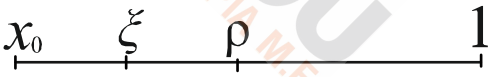
$f(x_0)-f(\rho)f'(\kappa)-f(\rho)>0$

Αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση

$\varphi(x)=f(x_0)-f(\rho)f'(x)-f(\rho)$ με $x\in[\rho,1)$

είναι $\varphi(x)>0$.

Στο $[x_0,\rho]$ από ΘΜΤ υπάρχει ένα τουλάχιστον



$\xi\in(x_0,\rho): f'(\xi)=\dfrac{f(x_0)-f(\rho)}{x_0-\rho}\Leftrightarrow f(x_0)-f(\rho)=f'(\xi)(x_0-\rho)$.

Από το **Δ3.** είναι

$f(\rho)+\rho=x_0\Leftrightarrow f(\rho)=x_0-\rho<0$.

Άρα $\varphi(x)=f'(\xi)(x_0-\rho)-(x_0-\rho)f'(x)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \varphi(x)=(x_0-\rho)\left(f'(\xi)-f'(x)\right)$

Είναι

$\varphi'(x)=(x_0-\rho)\left(-f''(x)\right)>0,$ αφού $x_0-\rho<0$

και $f''(x)>0\Rightarrow \varphi$ γνησίως αύξουσα στο $[\rho,1]$.

Άρα $\rho<x<1\Leftrightarrow\varphi(x)>\varphi(\rho)=(x_0-\rho)\left(f'(\xi)-f'(\rho)\right) \qquad (1)$

Αφού $\xi < \rho \underset{f'\uparrow}{\overset{f''>0}{\Rightarrow}} f'(\xi) < f'(\rho) \Rightarrow f'(\xi) - f'(\rho) < 0$

και $x_0 - \rho < 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \varphi(x) > \varphi(\rho) > 0 \Rightarrow \varphi(x) > 0.$