

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \stackrel{\text{ισορροπιών}}{\Rightarrow} -N_B \cdot (A_2 A) + w \cdot (A_1 A) = 0 \Rightarrow$$

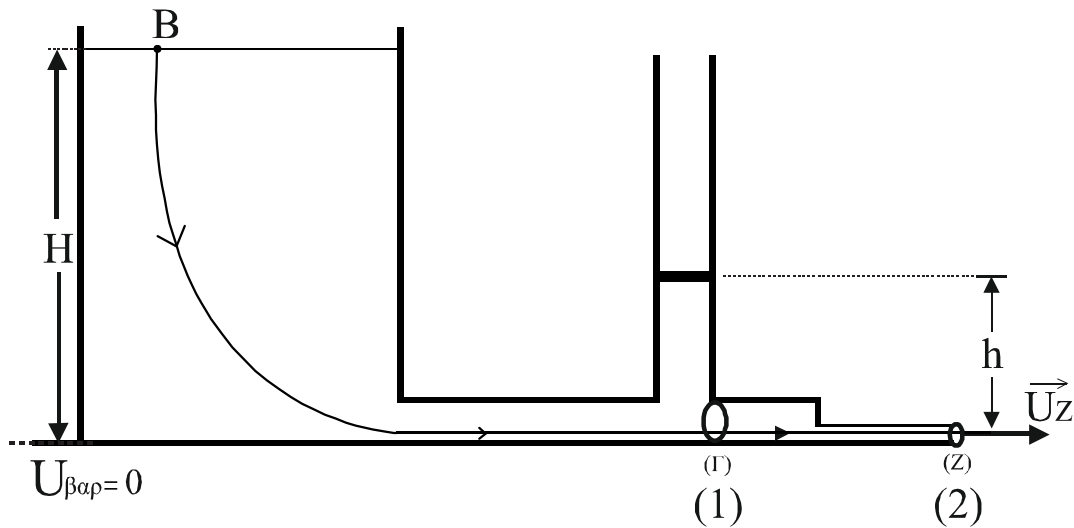
$$N_B \cdot \ell \cdot \eta \mu \varphi = w \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \sigma \nu \nu \varphi \Rightarrow N_B = \frac{w}{2} \cdot \frac{1}{\varepsilon \varphi \varphi} \quad (3)$$

Για να μην ολισθαίνει η ράβδος:

$$T \sigma \tau \leq \mu_s \cdot N_A \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \frac{w}{2} \cdot \frac{1}{\varepsilon \varphi \varphi} \leq \mu_s \cdot w \Rightarrow \frac{1}{2 \cdot \mu_s} \leq \varepsilon \varphi \varphi$$

Άρα για την ελάχιστη τιμή ισχύει: $\frac{1}{2 \cdot \mu_s} = \varepsilon \varphi \varphi$

B2.



α) Σωστή η (i)

β) $v_{\beta\alpha\rho} = 0$

Bernoulli B \rightarrow Z:

$$P_{\text{atm}} + 0 + \rho \cdot g \cdot H = P_{\text{atm}} + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_Z^2 + 0 \Rightarrow \rho \cdot g \cdot H = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_Z^2 \quad (1)$$

Bernoulli $\Gamma \rightarrow$ Z:

$$P_\Gamma + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_\Gamma^2 + 0 = P_{\text{atm}} + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_Z^2 + 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{\text{atm}} + \frac{w}{A} + \rho \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_\Gamma^2 = P_{\text{atm}} + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_Z^2 + 0 \quad (2)$$

Εξίσωση συνέχειας, $\Gamma \rightarrow$ Z

$$A_1 \cdot v_r = A_2 \cdot v_z \Rightarrow 2 \cdot \cancel{A_2} \cdot v_r = \cancel{A_2} \cdot v_r \Rightarrow v_r = \frac{v_z}{2} \quad (3)$$

(3) \rightarrow (2)

$$\frac{w}{A} + \rho \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \frac{v_z^2}{4} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_z^2$$

$$\frac{w}{A} + \rho \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_z^2 \left(1 - \frac{1}{4}\right)$$

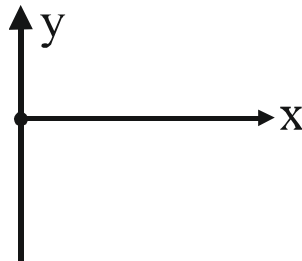
$$\frac{w}{A} + \rho \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_z^2 \cdot \frac{3}{4} \stackrel{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{w}{A} + \rho \cdot g \cdot h = \rho \cdot g \cdot H \cdot \frac{3}{4} \stackrel{\left(h = \frac{H}{4}\right)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{w}{A} + \rho \cdot g \cdot \frac{H}{4} = \rho \cdot g \cdot H \cdot \frac{3}{4}$$

$$\frac{w}{A} = \rho \cdot g \cdot H \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) \Rightarrow \boxed{w = \frac{\rho \cdot g \cdot H \cdot A}{2}}$$

B3



Α.Δ.Ο. (άξονας y)

$$0 + 0 = m_1 \cdot v'_1 - m_2 \cdot v'_{2y} \Rightarrow m_1 \cdot v'_1 = m_2 \cdot v'_2 \cdot \eta\mu 30^\circ$$

$$\cancel{m} \cdot v'_1 = \cancel{m} \cdot v'_2 \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \Rightarrow \boxed{v'_1 = v'_2} = (1)$$

Ελαστική κρούση, άρα:

$$k_{\text{ΟΛ}}^{\text{ΠΡΙΝ}} = k_{\text{ΟΛ}}^{\text{ΜΕΤΑ}} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1'^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2'^2$$

$$m \cdot v_1^2 + m \cdot v_1'^2 + 2 \cdot m \cdot v_2'^2 \Rightarrow$$

$$v_1^2 = v_1'^2 + 2 \cdot v_2'^2 \quad (1)$$

$$v_1^2 = v_1'^2 + 2 \cdot v_1'^2 \Rightarrow v_1^2 = 3 \cdot v_1'^2$$

$$v_1' = \frac{v_1}{\sqrt{3}} \quad (2)$$

Α.Δ.Ο. για την πλαστική κρούση

$$m_1 \cdot v_1' + 0 = (m_3 + m_1) \cdot V_k \Rightarrow$$

$$V_k = \frac{v_1'}{2} \Rightarrow V_k = \frac{v_1}{2 \cdot \sqrt{3}} \quad (3)$$

$$\frac{K_{1,3}}{K_1} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2m \cdot V_k^2}{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2} = 2 \cdot \left(\frac{V_k}{v_1} \right)^2$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{\frac{v_1}{2\sqrt{3}}}{v_1} \right)^2 = \frac{2}{4 \cdot 3} = \frac{1}{6}$$

Σωστή επιλογή η (iii).

ΘΕΜΑ Γ

$$\Gamma 1. \quad \bar{P} = I_{\text{ev}}^2 \cdot R_1 \Rightarrow I_{\text{ev}} = \sqrt{\frac{\bar{P}}{R_1}} \Rightarrow I_{\text{ev}} = \sqrt{\frac{12}{6}} = \sqrt{2} \text{ A}$$

$$I = I_{\text{ev}} \cdot \sqrt{2} = 2 \text{ A.}$$

$$V = I \cdot R_1 \Rightarrow V = 2 \cdot 6 = 12 \text{ Volt}$$

Γ2. $f' = 2 \cdot f \Rightarrow \omega' = 2 \cdot \omega \Rightarrow \omega' = 100\pi \text{ r/s}$

$$V' = N \cdot \omega' \cdot B \cdot A = N \cdot 2\omega \cdot B \cdot A$$

$$V' = 2V$$

$$V' = 24 \text{ Volt,}$$

$$I' = 2 \cdot I$$

$$I' = 4 \cdot \text{A}$$

$$\text{Άρα } P_{\sigma\tau} = V' \cdot I' \cdot \eta \mu^2(\omega't) \Rightarrow P_{\sigma\tau} = 24 \cdot 4 \cdot \eta \mu^2(100\pi \cdot t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{\sigma\tau} = 96 \cdot \eta \mu^2 \left(100\pi \cdot \frac{5}{1000} \right) = 96 \cdot \eta \mu^2 \left(\frac{\pi}{2} \right) = 96 \text{ Watt}$$

Γ3. $F = 0,5 \text{ N}$ $t_1 = 2\text{s}$

Στο χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq 2$ η ράβδος εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

$$\alpha = \frac{F}{m} = \frac{0,5}{0,5} = 1 \text{ m/s}^2$$

$$v_1 = \alpha \cdot t_1 = 1 \cdot 2 = 2 \text{ m/s}$$

$$F = F_L \Rightarrow F = B \cdot I \cdot \ell \Rightarrow F = B \cdot \ell \cdot \left(\frac{B \cdot v_1 \cdot \ell}{R_{\text{ολ}}}} \right)$$

$$F = \frac{B^2 \cdot \ell^2 \cdot v_1}{R_{\text{ολ}}} \Rightarrow F \cdot R_{\text{ολ}} = B^2 \cdot \ell^2 \cdot v_1 \Rightarrow$$

$$B^2 = \frac{F \cdot R_{\text{ολ}}}{v_1 \cdot \ell^2} \quad R_{\text{ολ}} = 2 + \frac{6+3}{6+3} = 2 + 2 = 4$$

$$B^2 = \frac{0,5 \cdot 4}{2 \cdot 1^2} \Rightarrow B^2 = 1 \Rightarrow \boxed{B = 1\text{T}}$$

Γ4.

$$W_F = F \cdot \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t_1^2 + F \cdot v_1 \cdot (t_2 - t_1)$$

$$W_F = 0,5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2^2 + 0,5 \cdot 2 \cdot 3$$

$$W_F = 1 + 3 = 4\text{J}$$

$$W'_F = 3J \quad \boxed{\text{Α.Δ.Ε.}}$$

$$\cancel{E_{\text{MHX}}^{\text{αρχ}}} + W_F = \cancel{E_{\text{MHX}}^{\text{τελ}}} + Q_J \Rightarrow Q_J = 3J$$

$$Q_J = Q_1 + Q_2$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad \text{λόγω παραλληλίας}$$

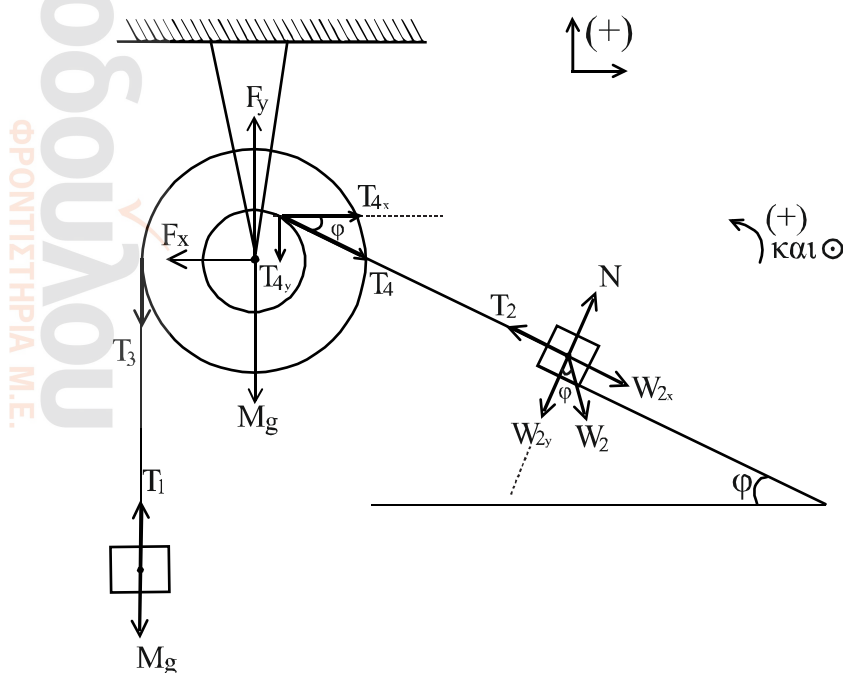
$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{2Q_1 = Q_2}$$

$$Q_J = 3Q_2 \Rightarrow Q_2 = 1J$$

$$x = \left(\frac{Q_2}{W_F} \right) \cdot 100\% = \left(\frac{1}{4} \right) \cdot 100\% = 25\%$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.



Η διπλή τροχαλία ισορροπεί στροφικά.

$$\text{Άρα: } \sum \tau = 0 \Rightarrow T_3 \cdot 2r - T_4 \cdot r = 0 \Rightarrow 2T_3 = T_4 \quad (1)$$

Όμως $T_3 = T_1$ και $T_4 = T_2$ γιατί τα νήματα δεν έχουν μάζα, άρα η (1) γίνεται:
 $2 \cdot T_1 = T_2 \quad (2)$.

Το Σ_1 ισορροπεί άρα $T_1 = m_1 g$ και το Σ_2 ισορροπεί άρα $T_2 = W_{2x} \Rightarrow T_2 = W_2 \cdot \eta\mu\varphi \Rightarrow T_2 = m_2 g \eta\mu\varphi$. Άρα η (2) γίνεται:

$$2m_1 g = m_1 g \eta\mu\varphi \Rightarrow m_1 = \frac{m_2 \cdot \eta\mu\varphi}{2} = \frac{5 \cdot 0,6}{2} = \boxed{1,5 \text{ kg}}$$

Η τροχαλία ισορροπεί και μεταφορικά.

$$\text{Άρα } \left. \begin{array}{l} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} T_{4x} = Fx \\ Fy = Mg + T_3 + T_{4y} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} T_4 \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = Fx \\ Fy = Mg + T_3 + T_4 \cdot \eta\mu\varphi \end{array} \right\} \begin{array}{l} T_4 = T_2 \\ T_3 = T_1 \end{array} \rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} Fx = T_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \\ Fy = Mg + T_1 + T_2 \cdot \eta\mu\varphi \end{array} \right\} \begin{array}{l} T_2 = m_2 g \sigma\upsilon\nu\varphi \\ T_1 = m_1 g \end{array} \rightarrow$$

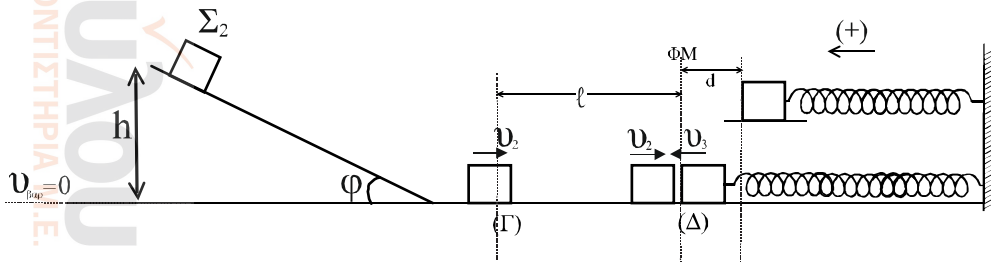
$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} Fx = m_2 g \cdot \eta\mu\varphi \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \\ Fy = Mg + m_1 g + m_2 g \cdot \eta\mu\varphi \cdot \eta\mu\varphi \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$Fx = 50 \cdot 0,8 \cdot 0,6 = 24 \text{ N}$$

$$Fy = 15 + 15 + 50 \cdot 0,6 \cdot 0,6 = 48 \text{ N}$$

$$\text{Έτσι } F_{\acute{\alpha}\xi\omega\nu\alpha} = \sqrt{Fx^2 + Fy^2} = \sqrt{24^2 + 48^2} = \sqrt{24^2 + 2^2 \cdot 24^2} = 24\sqrt{5} \text{ N.}$$

Δ2.



Εφαρμογή Αρχής Διατήρησης Ενέργειας για το Σ_2 από την αρχική του θέση μέχρι τη θέση Γ :

$$v_{\beta\alpha\rho\alpha\rho\chi} = k_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow m_2 gh = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \Rightarrow |v_2| = \sqrt{2gh} \Rightarrow |v_2| = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 1,8} = 6 \text{ m/s}$$

Από το (Γ) έως το (Δ) το Σ_2 φτάνει μετά από χρόνο $\Delta t_2 = \frac{(\Gamma\Delta)}{v_2} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{\ell}{v_2} = \frac{3\pi}{5 \cdot 6} = \frac{\pi}{10} \text{ sec}$ αφού κινείται ευθύγραμμα και ομαλά στο επίπεδο.

Στο ίδιο χρονικό διάστημα το Σ_3 εκτελεί το $\frac{1}{4}$ της ταλάντωσης του.

Άρα $\Delta t_2 = T/4$, όπου T η περίοδος ταλάντωσης του Σ_3 .

Δηλαδή:

$$\Delta t_2 = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \sqrt{\frac{m_3}{k}} \Rightarrow \frac{\pi}{10} = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot \sqrt{\frac{5}{k}} \Rightarrow \frac{1}{5} = \sqrt{\frac{5}{k}} \Rightarrow \frac{1}{25} = \frac{5}{k} \Rightarrow \boxed{k = 125 \text{ N/m}}$$

Δ3. Στο σημείο Δ γίνεται η κεντρική ελαστική κρούση των Σ_2 και Σ_3 . Επειδή έχουν ίσες μάζες έχουμε ανταλλαγή ταχυτήτων.

$$\text{Άρα: } v'_3 = -|v_2| \Rightarrow v'_3 = -6 \text{ m/s}$$

Και $v'_2 = v_3 = \omega \cdot A$ όπου ω και A στοιχεία της ΑΑΤ του Σ_3 .

$$\text{Είναι } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{125}{5}} = 5 \text{ rad/s} \text{ και } A = d = 0,2 \text{ m}$$

$$\text{Έτσι } v'_2 = 5 \cdot 0,2 = 1 \text{ m/s}$$

Επειδή την $t = 0$ αμέσως μετά την κρούση το Σ_3 είναι στη θέση ισορροπίας και έχει $v < 0$, παρουσιάζει λοιπόν αρχική φάση. Άρα: $x = A' \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$ την $t = 0$ το $x = 0$ οπότε έχουμε $0 = \eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu 0 \Rightarrow \varphi_0 = 2k\pi + \pi$ αφού η ταχύτητα είναι αρνητική.

Επειδή πρέπει $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$, το $k = 0$ άρα $\varphi_0 = \pi \text{ rad}$.

Επειδή την v'_3 την διαθέτει το m_3 στη θέση ισορροπίας του μετά την κρούση θα είναι το μέτρο της ίσο με $\omega \cdot A'$. Δηλαδή

$$|v'_3| = \omega \cdot A' \Rightarrow 6 = 5 \cdot A' \Rightarrow A' = 1,2 \text{ m}$$

Έτσι για την εξίσωση απομάκρυνσης του Σ_3 θα ισχύει: $x = 1,2 \cdot \eta\mu(5t + \pi)$ στο S.I.

Δ4. Από υπόθεση $k_{\text{ταλ.}} = 8v_{\text{ταλ.}} \Rightarrow E_{\text{ολ.}} - v_{\text{ταλ.}} = 8v_{\text{ταλ.}} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot k \cdot A'^2 = 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x = \pm \frac{A'}{3} = \pm 0,4 \text{ m}$ και $\Rightarrow x = -0,4 \text{ m}$, αφού είναι για πρώτη φορά μετά την
 κρούση.

Έτσι: $\frac{dP}{dt} = \Sigma F = -k \cdot x = -125 \cdot (-0,4) = 50 \text{ kgr} \cdot \text{m} / \text{s}^2 \Rightarrow \frac{dP}{dt} = 50 \text{ kgr} \cdot \text{m} / \text{s}^2$

$\frac{dk}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{\Sigma \vec{F} \cdot d\vec{x}}{dt} = \Sigma \vec{F} \cdot \vec{v}_3 = -k \cdot \vec{x} \cdot \vec{v}_3$ επειδή \vec{x} και \vec{v}_3 συγγραμικά

έχουμε: $\frac{dk}{dt} = -k \cdot x \cdot v_3$

Όμως $k_{\text{ταλ.}} = 8 \cdot v_{\text{ταλ.}} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot v_3^2 = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot \omega^2 \cdot x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow v_3^2 = 8 \cdot 25 \cdot 0,4^2 \Rightarrow v_3^2 = 32 \Rightarrow |v_3| = 4\sqrt{2} \text{ m/s}$

Άρα $\left| \frac{dk}{dt} \right| = k \cdot |x| \cdot |v_3| = 125 \cdot 0,4 \cdot 4\sqrt{2} = 200\sqrt{2} \text{ J/s}$

Δ5. Το Σ_3 περνά από την θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου $\Delta t = \frac{T}{2}$ μετά την
 κρούση αφού εκτελεί μέχρι τότε την μισή ταλάντωση.

Άρα το Σ_2 θα διανύσει προς τα αριστερά

$\Delta x_2 = v'_2 \cdot \Delta t = v'_2 \cdot \frac{T}{2} = v'_2 \cdot \frac{2\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{m_3}{k}} = 1 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{5}{125}} = 0,2\pi \text{ m} = 0,628 \text{ m}$.

Επειδή το Σ_3 ξεκίνησε από τη θέση φυσικού μήκους αμέσως μετά την κρούση
 και κατέληξε στην ίδια θέση μετά από $\Delta t = \frac{T}{2}$ η μεταξύ των δύο σωμάτων

απόσταση «διαμορφώθηκε» μόνο από την κίνηση του Σ_2 .

Άρα $\Delta d = \Delta x_2 = 0,628 \text{ m}$